DOI:10.16249/j.cnki.54-1034/c.2013.01.025

一个包含 Smarandache 函数的方程及其正整数解

多布杰
(西藏大学理学院 西藏拉萨 850000)

摘要:研究数论函数的各种性质是初等数论的一个重要内容,而著名的 Smarandache 函数 $S(n)$是重要的数论函数之一,它是由美籍罗马尼亚著名数论专家 Florentin Smarandache 教授首先提出的。许多学者对 Smarandache 函数的性质及含有 Smarandache 函数的方程的可解性做了深入的研究,并取得了丰硕的成果。文章证明了包含 Smarandache 函数的方程 $\varphi(n)=S(n^{10})$的可解性,并给出了该方程的全部正整数解。

关键词:Smarandache 函数;Euler 函数;方程;正整数解

中图分类号:O156.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-5738(2013)01-125-05

引 言

对任意的正整数,Smarandache 函数表示使得$n\mid m!$ 的最小正整数 m,记作 $S(n)$,即 $S(n)=\min\{m\in Z^{+}\mid n\mid m!\}$[1]。而函数 $\varphi(n)$为著名的 Euler 函数,即在序列 1,2,...,n-1,n 或 0,1,2,...,n-1 中与 n 互质的整数个数[2]。关于 Smarandache 函数和 Euler 函数的研究是数论中十分重要和有意义的课题。许多学者研究了包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程:

$$\varphi(n)=S(n^{k}) \quad (1)$$

的可解性,并得到了当 k=1,2,3,4,5,6,7,8,9 时的全部正整数解[3-6]。

本文讨论了方程(1)在 k=10 时的求解问题及解的个数问题。

1 若干引理

引理 1[7] 若 m_1,m_2是两个互质的正整数,则 $\varphi(m_1\cdot m_2)=\varphi(m_1)\varphi(m_2)$.

引理 2[8] 设 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$,则 $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$.

引理 3[9] 当 $n>2$ 时,$\varphi(n)$必为偶数。

引理 4[10] 如果 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$ 是正整数 n 的标准分解式,则:

收稿日期: 2012-11-28
作者简介:多布杰,男,藏族,西藏日喀则人,西藏大学理学院副教授,主要研究方向为初等数论。

$$S(n)=\max\{S(p_1^{a})S(p_2^{a})\ldots S(p_s^{a})\}.$$

引理 5[11] 对于质数 p 和正整数 k，有 $S(p^k)\leq kp$，特别地，当 $k<p$ 时，有 $S(p^k)=kp$.

引理 6[12] 若 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_s^{a_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，且

$$S(p^{kr})=\max\{S(p_1^{ka_1})S(p_2^{ka_2})\ldots S(p_s^{ka_s})\}.$$

则当 $p\geq 2k+1$，且 $k\geq 1$，$r\geq 2$ 时方程 (1) 无解；当 $2k+1$ 为质数时，方程 (1) 仅有 2 个解，且 $n=2p^2$.

2 定理及其证明

定理 当 $k=10$ 时，方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ 仅有解 $n=1$.

证明 当 $k=10$ 时，方程 (1) 可以写成 $\varphi(n)=S(n^{10})$. (2)

显然，$n=1$ 是方程 (2) 的解。以下我们主要讨论 $n>1$ 时的情况。

设 $n>1$ 且 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_s^{a_s}$ 是正整数 n 的标准分解式，则由引理 4 有：

$$S(n^{10})=\max\{S(p_1^{10a_1})S(p_2^{10a_2})\ldots S(p_s^{10a_s})\}=S(p^{10r}) \quad (3)$$

由引理 1 可知：

$$\varphi(n)=\varphi(p^r)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right) \quad (4)$$

将 (3)、(4) 代入 (2) 式得：

$$p^{r-1}(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S(p^{10r}) \quad (5)$$

1．当 $p=2$ 时，方程 (5) 可变为 $2^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{2^r}\right)=S(2^{10r})$ (6)，则：

若 $r=1$，那么由 (6) 式可知：

$$\varphi\left(\frac{n}{2}\right)=S(2^{10})=12 \quad (7)$$

由 (7) 式可推得 $\varphi\left(\frac{n}{2}\right)>1$，则 n 必含有奇质因数 q，然而，由引理 5 得：

$$S(q^{10})=\begin{cases}24,\ q=3\\45,\ q=5\\63,\ q=7\\109,\ q\geq 11\end{cases}$$

由于 (3) 式和 (7) 式矛盾，故方程无解。同理可证 $r=2$ 时，方程 (2) 无解。

若 $r=3$，由 (6) 式可知，$4\varphi\left(\frac{n}{8}\right)=S(2^{30})=36$，即 $\varphi\left(\frac{n}{8}\right)=9$，与引理 3 矛盾，方程 (2) 无解。

若 $r=4$，由 (6) 式可知，$8\varphi\left(\frac{n}{16}\right)=S(2^{40})=52$，矛盾，方程无解。

同理可证当 $r=5,6,7,8$ 时，方程 (2) 无解。

若 $r\geq 9$，则由引理 5 有：

$$20r\ge S(2^{10r})=2^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{2^r}\right)\ge 2^{r-1}=\frac{1}{2}2^r$$

即 $40r\ge 2^r$，矛盾。所以当 $p=2$，$r\ge 9$ 时，方程(2)无解。

2．当 $p=3$ 时，方程(5)可变为 $3^{r-1}\cdot 2\varphi\left(\frac{n}{3^r}\right)=S(3^{10r})$ (8)，则

若 $r=1$，由(8)式可知，$2\varphi\left(\frac{n}{3}\right)=S(3^{10})=27$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=2$，由(8)式可知，$6\varphi\left(\frac{n}{9}\right)=S(3^{20})=45$，即，$2\varphi\left(\frac{n}{9}\right)=15$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=3$，由(8)式可知，$18\varphi\left(\frac{n}{27}\right)=S(3^{30})=63$，即，$2\varphi\left(\frac{n}{27}\right)=7$ 矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=4$，由(8)式可知，$54\varphi\left(\frac{n}{81}\right)=S(3^{40})=81$，即，$2\varphi\left(\frac{n}{81}\right)=S(3^{40})=3$ 矛盾，故方程(2)无解。

若 $r\ge 5$，则由引理 5 有：

$$30r\ge S(3^{10r})=2\cdot 3^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{3^r}\right)\ge 2\cdot 3^{r-1}=\frac{2}{3}3^r$$

即 $90r\ge 2\cdot 3^r$，矛盾。所以当 $p=3$，$r\ge 5$ 时，方程(2)无解。

3．当 $p=5$ 时，方程(5)可变为 $5^{r-1}\cdot 4\varphi\left(\frac{n}{5^r}\right)=S(5^{10r})$ (9)，则

若 $r=1$，由(9)可知，$4\varphi\left(\frac{n}{5}\right)=S(5^{10})=45$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=2$，由(9)式可知，$20\varphi\left(\frac{n}{25}\right)=S(5^{20})=85$，即，$4\varphi\left(\frac{n}{5}\right)=17$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=3$，由(9)式可知，$100\varphi\left(\frac{n}{125}\right)=S(5^{30})=125$，即，$4\varphi\left(\frac{n}{125}\right)=5$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r\ge 4$，则由引理 5 有

$$50r\ge S(5^{10r})=4\cdot 5^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{5^r}\right)\ge 4\cdot 5^{r-1}=\frac{4}{5}5^r$$

即 $250r\ge 4\cdot 5^r$，矛盾。所以当 $p=5$，$r\ge 4$ 时，方程(2)无解。

4．当 $p=7$ 时，方程(5)可变为 $7^{r-1}\cdot 6\varphi\left(\frac{n}{7^r}\right)=S(7^{10r})$ (10)，则：

若 $r=1$，由(10)式可知，$6\varphi\left(\frac{n}{7}\right)=S(7^{10})=63$，即，$2\varphi\left(\frac{n}{7}\right)=21$，矛盾，故方程(2)无解。

若 $r=2$，由(10)式可知，$42\varphi\left(\frac{n}{49}\right)=S(7^{20})=126$，即，$\varphi\left(\frac{n}{49}\right)=3$，与引理 3 矛盾，故方程(2)无解。

若 $r\ge 3$，则由引理 5 有：

$$70r\ge =S(7^{10r})=6\cdot 7^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{7^r}\right)\ge 6\cdot 7^{r-1}=\frac{6}{7}7^r$$

即 $490r\ge 6\cdot 7^r$，矛盾。所以当 $p=7$，$r\ge 3$ 时，方程(2)无解。

5．当 $p=11$ 时，方程（5）可变为：$11^{r-1}\cdot 10\varphi\left(\frac{n}{11^r}\right)=S(11^{10r})$　　（11），则：

若 $r=1$，由（11）式可知，$10\varphi\left(\frac{n}{11}\right)=S(11^{10})=110$，即，$\varphi\left(\frac{n}{11}\right)=11$，与引理 3 矛盾，故方程（2）无解。

若 $r=2$，由（11）式可知，$110\varphi\left(\frac{n}{121}\right)=S(11^{20})=209$，即，$10\varphi\left(\frac{n}{121}\right)=19$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r\geq 3$，则由引理 5 有：

$$110r\geq=S(11^{10r})=10\cdot 11^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{11^r}\right)\geq 10\cdot 11^{r-1}=\frac{10}{11}11^r$$

即 $1210r\geq 10\cdot 11^r$，矛盾。所以当 $p=11$，$r\geq 3$ 时，方程（2）无解。

6．当 $p=13$ 时，方程（5）可变为：$13^{r-1}\cdot 12\varphi\left(\frac{n}{13^r}\right)=S(13^{10r})$　　（12），则：

若 $r=1$，由（12）式可知，$12\varphi\left(\frac{n}{13}\right)=S(13^{10})=130$，即，$6\varphi\left(\frac{n}{13}\right)=65$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r=2$，由（12）式可知，$13\cdot 12\varphi\left(\frac{n}{13^2}\right)=S(13^{20})=247$，即，$12\varphi\left(\frac{n}{13^2}\right)=19$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r\geq 3$，则由引理 5 有：

$$130r\geq=S(13^{10r})=12\cdot 13^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{13^r}\right)\geq 12\cdot 13^{r-1}=\frac{12}{13}13^r$$

即 $13^2\cdot 10r\geq 12\cdot 13^r$，矛盾。所以当 $p=13$，$r\geq 3$ 时，方程（2）无解。

7．当 $p=17$ 时，方程（5）可变为：$17^{r-1}\cdot 16\varphi\left(\frac{n}{17^r}\right)=S(17^{10r})$　　（13），则：

若 $r=1$，由（13）式可知，$16\varphi\left(\frac{n}{17}\right)=S(17^{10})=170$，即，$8\varphi\left(\frac{n}{17}\right)=85$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r=2$，由（13）式可知，$17\cdot 16\varphi\left(\frac{n}{17^2}\right)=S(17^{20})=323$，即，$16\varphi\left(\frac{n}{17^2}\right)=19$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r\geq 3$，则由引理 5 有：

$$170r\geq S(17^{10r})=16\cdot 17^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{17^r}\right)\geq 16\cdot 17^{r-1}=\frac{16}{17}17^r$$

即 $17^2\cdot 10r\geq 16\cdot 17^r$，矛盾。所以当 $p=17$，$r\geq 3$ 时，方程（2）无解。

8．当 $p=19$ 时，方程（5）可变为：$19^{r-1}\cdot 18\varphi\left(\frac{n}{19^r}\right)=S(19^{10r})$　　（14），则：

若 $r=1$，由（14）式可知，$18\varphi\left(\frac{n}{19}\right)=S(19^{10})=190$，即，$9\varphi\left(\frac{n}{19}\right)=95$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r=2$，由（14）式可知，$19\cdot 18\varphi\left(\frac{n}{19^2}\right)=S(19^{20})=361$，即，$18\varphi\left(\frac{n}{19^2}\right)=19$，矛盾，故方程（2）无解。

若 $r\geq 3$，则由引理 5 有：

$$190r\geq=S(19^{10r})=18\cdot 19^{r-1}\varphi\left(\frac{n}{19^r}\right)\geq 18\cdot 19^{r-1}=\frac{18}{19}17^r$$

即 $19^2\cdot 10r\geq 18\cdot 19^r$，矛盾。所以当 $p=19$，$r\geq 3$ 时，方程（2）无解。

9．当 $p\geq 23$，$r=1$ 时，方程(5)可变为：$(p-1)\varphi\left(\frac{n}{p}\right)=S(p^{10})=10p$．因为 $(p,p-1)=1$，且若有 $\frac{10p}{p-1}=2m$ $(m\in N^{+})$ (14)，即，$p=\frac{m(p-1)}{5}$，矛盾，所以方程(2)无解。

当 $p\geq 23$，$r\geq 2$ 时，由引理 6 可知，方程(2)无解。

综上所述，当 $k=10$ 时，方程 $\varphi(n)=S(n^{k})$ 仅有解 $n=1$．

参考文献

[1][9] 曹楠,高丽.关于数论函数方程[J].西南民族大学学报,2009(5):992-994.

[2][6][7] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].北京:高等教育出版社,2003:58-60.

[3] 郑涛.关于数论函数方程[J].中国科教创新导刊,2009(2):154-154.

[4][10][11] 陈斌.一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程[J].西南大学学报,2012(2):70-73.

[5][8] 黄寿生,陈锡庚.关于数论函数方程[J].华南师范大学学报,2004(7):41-43.

An equation involving the Smarandache function and Its Positive Integer Solution

Duo Bu-jie

(School of Science, Tibet University, Lhasa Tibet 850000, China)

Abstract: The research on various properties of arithmetical functions is one of the important elements in elementary number theory. The famous Smarandache function $S(n)$ is one of the important arithmetical functions developed by professor Smarandache. The property of the function and the solvability of the equation involving Smarandache function have been researched by many scholars and achieved fruitful results. The solvability of $\varphi(n)=S(n^{10})$ was proved based on the interest of Smarandache function and all the positive integer solutions of the equation were provided as well.

Keywords: Smarandache function; Euler´s function; equation; positive integer solution

[责任编辑 索郎桑姆]

[上接第 124 页]

Research on the Impact of Transportation on Tourism in Tibet and Its Developmental Countermeasures

Tian Rong-yan Wang Jian-hua

(School of Engineering, Tibet University, Lhasa Tibet 850000, China)

Abstract: Tourism as a leading industry in Tibet, its development plays a vital role in the economic construction in Tibet. The traffic is the baseline of socio-economic development as well was the prerequisite for the development of tourism industry in Tibet. The tourism development promoted by transport development is a real problem of study. So far, the most of the studies focused on the significant impact of traffic on the development of tourism industry from the qualitative point of view. In the present paper the impact of various transportation modes on the development of tourism industry was analyzed based on the relevant data of transportation in Tibet such as freight volume, number of passengers and passenger revenue by using SPSS18.0 and provided the developmental countermeasures of transportation in Tibet.

Keywords: transportation; tourism industry; Tibet; quantitative analysis

[责任编辑 索郎桑姆]